Freie Universität Berlin
Arnimallee 14
14195 Berlin

Sommersemester 2007

Fortgeschrittenenpraktikum – Vorbereitung

Mie-Streuung

Erik Streb*

14. Mai 2007
Betreuer: Frau Dr. Tegeder

1 Einleitung

In diesem Versuch soll die Streuung von Laserlicht an kleinen Glykoltröpfchen und Glaskügelchen untersucht werden, deren Radius in der Größenordnung der Lichtwellenlänge liegt. Die Tröpfchen werden dazu in einer elektrodynamischen Teilchenfalle – einer sogenannten *Paulfalle* – in der Schwebe gehalten. Außerdem kann das Verdampfen der Tröpfchen beobachtet werden.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Paulfalle

Um die Funktionsweise der Paulfalle zu verstehen, betrachtet man ein Teilchen der Masse m und der Ladung e im Potential

$$\Phi(\vec{r}) = V\Big(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2\Big).$$

Der Raum sei – bis auf des Teilchen in der Falle – ladungsfrei, es muss daher die Laplace-Gleichung für Φ

$$\Delta\Phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \tag{1}$$

erfüllt sein. Eine mögliche Lösung dieser Gleichung für die Koeffizienten α, β und γ, die wir hier betrachten wollen, ist

$$\alpha = \beta \quad \text{und} \quad \gamma = -2\alpha.$$

*E-Mail: mail@erikstreb.de

Wir erhalten mit entsprechender Wahl von α als Potential:

$$\Phi = \frac{V}{2{r_0}^2}(r^2 - 2z^2) \tag{2}$$

Dass dieses Potential für konstantes V nicht den Charakter einer Teilchenfalle hat, ist einleuchtend, denn es gibt wegen (1) keinen Ort *minimalen* Potentials. Wählt man allerdings V als zeitabhängiges Wechselfeld, d. h.

$$V = V(t) = U - V_0 \cos(\omega t)$$

so zeigt sich, dass auf diese Weise die Realisierung einer Teilchenfalle möglich ist.

Die Bewegungsgleichungen des Teilchens in z- und r-Richtung sind mit $\vec{F} = -e\vec{\nabla}\Phi$ gegeben durch

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{{r_0}^2 m}\Big(U - V_0 \cos(\omega t)\Big) r \tag{3}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{{r_0}^2 m}\Big(U - V_0 \cos(\omega t)\Big) z. \tag{4}$$

Diese beiden Differentialgleichungen erhalten mit den Ersetzungen

$$a_z = -2a_r = -8\frac{e}{m\omega^2}\frac{U}{{r_0}^2}, \qquad q_z = -2q_r = -4\frac{e}{m\omega^2}\frac{V}{{r_0}^2}, \qquad 2\xi = \omega t \tag{5}$$

die Form der *Mathieuschen Differentialgleichung*

$$f''(\xi) + \Big(a - 2b\ \cos(2\xi)\Big) f(\xi) = 0.$$

Die Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung sind bekannt. Ihre allgemeine Form ist gegeben durch:

$$f(\xi) = Ae^{\mu\xi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}e^{i2n\xi} + Be^{-\mu\xi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{2n}e^{-i2n\xi}$$

Lässt man nun die tatsächliche Bahn des Teilchens außer Acht und untersucht nur die Frage, ob die Bahn des Teilchens stabil ist, d. h. ob $r(t)$ und $z(t)$ einen gewissen Abstand *nicht* überschreiten, so zeigt sich, dass für stabile Bahnen $\mathrm{Re}(\mu) = 0$ gelten muss. Als Stabilitätsbedingungen für die Koeffizienten der Differentialgleichung – somit die Größen m und e sowie die Spannungen U und V_0 – ergibt sich durch Rechnungen das sogenannte Stabilitätsdiagramm. In Abbildung 1 wurde q über a aufgetragen, die stabilen Bereiche sind schraffiert dargestellt.

Sind nun die Werte der Spannungen für ein bestimmtes Teilchen passend gewählt, so lässt es sich unbegrenzt lange in der Nähe des Koordinatenursprungs halten. Es wurde also mit elektrischen Feldern eine Teilchenfalle realisiert.

Um in der Praxis ein Quadrupolpotential der gewünschten Form zu erzeugen, werden Elektroden verwendet, die die Form von Äquipotentialflächen wie in (2) haben. Zu sehen in Abbildung 2.

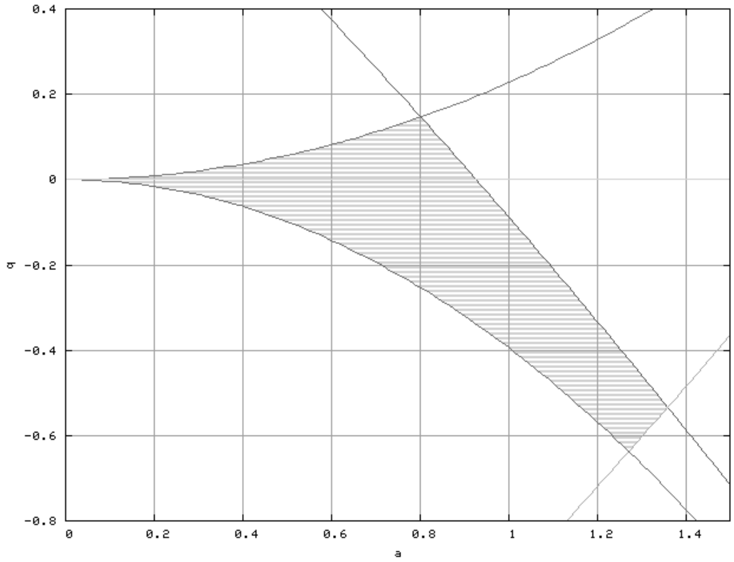

Abbildung 1: Das Stabilitätsdiagramm einer Paulfalle

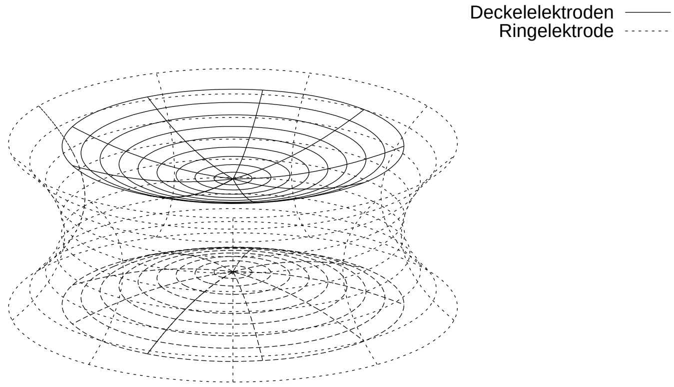

Abbildung 2: Die Form der Elektroden einer Paulfalle

2.2 Mie-Streuung

Als Mie-Streuung wird die Streuung von Licht an sphärischen, homogenen Partikeln bezeichnet. Die Theorie der Mie-Streuung ist dabei auf Partikel beschränkt, deren Durchmesser ungefähr von der Größenordnung der Wellenlänge des verwendeten Lichts ist.

Die Lösung des theoretischen Problems der Lichtstreuung an einem solchen Partikel besteht im wesentlichen aus der Lösung der Maxwell-Gleichungen mit entsprechenden Stetigkeitsbedingungen für die Lösungen an dessen Oberfläche. Ein Ergebnis der theoretischen Überlegungen ist, dass die Intensitätsverteilung des Streulichts eine Abfolge von Minima und Maxima aufweist, deren Anzahl und Abstand von den Abmessungen und dem Brechungsindex des Partikels abhängen. Es ist also möglich, aus dem Streulicht Rückschlüsse auf den Durchmesser zu ziehen.

2.3 Verdampfungsprozess eines Flüssigkeitstropfens

Die Verdampfung eines Flüssigkeitstropfens in Luft bei konstanter Temperatur wird durch den Vorgang der Teilchendiffusion beschrieben. Für den Radius des Teilchens lässt sich folgende Differentialgleichung aufstellen:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{S}{2r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r^2(t) = -S$$

Der Koeffizient S ist dabei ein von der Umgebungstemperatur und vom Dampfdruck abhängiger Parameter. Durch Integration der Differentialgleichung gelangt man zu einer Gleichung für die Oberfläche des Teilchens mit linearer Zeitabhängigkeit.

$$r(t) = \sqrt{{r_0}^2 - S \cdot (t - t_0)} \tag{6}$$

2.4 Bestimmung des Q/m-Verhältnisses von Teilchen in einer Paulfalle

Befindet sich ein geladenes Teilchen der Masse m und Ladung Q in einem elektrischen Feld in Ruhe, so herrscht Kräftegleichgewicht. Die Gewichtskraft, die auf das Teilchen wirkt, wird also gerade von der Coulomb-Kraft kompensiert.

$$F_{\text{Gewicht}} = F_{\text{Coulomb}}$$

Für die Gewichtskraft gilt $F_{\text{Gewicht}} = mg$. Die Coulomb-Kraft auf das Teilchen wird durch den Fall eines homogenen elektrischen Feldes mit Hilfe eines Korrekturfaktors genähert ($K = 0{,}798$).

$$F_{\text{Coulomb}} = Q\frac{U}{2z_0}K = Q\frac{U}{\sqrt{2}r_0}0{,}798$$

Setzt man nun die Kräfte gleich, folgt für Q/m bei $r_0 = 5\,\text{mm}$:

$$\frac{Q}{m} = \frac{\sqrt{2}r_0 g}{0{,}798 \cdot U} = \frac{8{,}6926}{U} \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{C}}{\text{m}} \tag{7}$$

3 Der Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Paulfalle, einem Helium-Neon-Laser und einer digitalen Videokamera. Der Laserstrahl wird auf das Zentrum der Paulfalle gerichtet und das Streulicht mit der Kamera aufgenommen. Die Streulichtintensität wird dann mit einem Computerprogramm analysiert.